

Dinámica Clásica de Bipartículas

Alejandro A. Torassa

Licencia Creative Commons Atribución 3.0
(2013) Buenos Aires, Argentina
atorassa@gmail.com

Resumen

Este trabajo presenta una dinámica clásica de bipartículas, que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia no rotante (inercial o no inercial) sin necesidad de introducir fuerzas ficticias.

Definiciones

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{ab} &= (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) = \text{posición} & \check{\mathbf{r}}_{ab} &= (\check{\mathbf{r}}_a - \check{\mathbf{r}}_b) = \text{posición no cinética} \\ \mathbf{v}_{ab} &= (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b) = \text{velocidad} & \check{\mathbf{v}}_{ab} &= (\check{\mathbf{v}}_a - \check{\mathbf{v}}_b) = \text{velocidad no cinética} \\ \mathbf{a}_{ab} &= (\mathbf{a}_a - \mathbf{a}_b) = \text{aceleración} & \check{\mathbf{a}}_{ab} &= (\check{\mathbf{a}}_a - \check{\mathbf{a}}_b) = \text{aceleración no cinética}\end{aligned}$$

Relaciones

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{a}}_{ab} &= \mathbf{F}_{ab}/m_{ab} & \rightarrow & \check{\mathbf{a}}_{ab}^2 = (\mathbf{F}_{ab}/m_{ab})^2 \\ \check{\mathbf{v}}_{ab} &= \int \check{\mathbf{a}}_{ab} dt & \rightarrow & \check{\mathbf{v}}_{ab} = \int (\mathbf{F}_{ab}/m_{ab}) dt \\ 1/2 \check{\mathbf{v}}_{ab}^2 &= \int \check{\mathbf{a}}_{ab} d\check{\mathbf{r}}_{ab} & \rightarrow & 1/2 \check{\mathbf{v}}_{ab}^2 = \int (\mathbf{F}_{ab}/m_{ab}) d\check{\mathbf{r}}_{ab} \\ m_{ab} &= m_a m_b & \mathbf{F}_{ab} &= (\mathbf{F}_a m_b - \mathbf{F}_b m_a)\end{aligned}$$

Principios

$$(1) \quad \boxed{m_{ab}\mathbf{r}_{ab} - m_{ab}\check{\mathbf{r}}_{ab} = 0} \quad \rightarrow \quad \boxed{1/2 m_{ab}\mathbf{r}_{ab}^2 - 1/2 m_{ab}\check{\mathbf{r}}_{ab}^2 = 0} \quad (2)$$

↓

↓

$$(3) \quad \boxed{m_{ab}\mathbf{v}_{ab} - m_{ab}\check{\mathbf{v}}_{ab} = 0} \quad \rightarrow \quad \boxed{1/2 m_{ab}\mathbf{v}_{ab}^2 - 1/2 m_{ab}\check{\mathbf{v}}_{ab}^2 = 0} \quad (4)$$

↓

↗

↓

$$(5) \quad \boxed{m_{ab}\mathbf{a}_{ab} - m_{ab}\check{\mathbf{a}}_{ab} = 0} \quad \rightarrow \quad \boxed{1/2 m_{ab}\mathbf{a}_{ab}^2 - 1/2 m_{ab}\check{\mathbf{a}}_{ab}^2 = 0} \quad (6)$$

Sustituyendo las relaciones en los principios, se obtiene:

$$(1) \quad \boxed{m_{ab}\mathbf{r}_{ab} - m_{ab}\check{\mathbf{r}}_{ab} = 0} \quad \rightarrow \quad \boxed{1/2 m_{ab}\mathbf{r}_{ab}^2 - 1/2 m_{ab}\check{\mathbf{r}}_{ab}^2 = 0} \quad (2)$$

↓

↓

$$(3) \quad \boxed{m_{ab}\mathbf{v}_{ab} - \int \mathbf{F}_{ab} dt = 0} \quad \rightarrow \quad \boxed{1/2 m_{ab}\mathbf{v}_{ab}^2 - \int \mathbf{F}_{ab} d\mathbf{r}_{ab} = 0} \quad (4)$$

↓

↗

↓

$$(5) \quad \boxed{m_{ab}\mathbf{a}_{ab} - \mathbf{F}_{ab} = 0} \quad \rightarrow \quad \boxed{1/2 m_{ab}\mathbf{a}_{ab}^2 - 1/2 (\mathbf{F}_{ab}^2 / m_{ab}) = 0} \quad (6)$$

Observaciones

Un sistema de partículas forma un sistema de bipartículas. Por ejemplo, el sistema de partículas A, B, C y D forma el sistema de bipartículas AB, AC, AD, BC, BD y CD.

La dinámica de partículas se obtiene de la dinámica de bipartículas si sólo consideramos las bipartículas que tienen la misma partícula (Anexo A)

Los principios son las transformaciones entre un sistema de referencia S y un sistema de referencia no cinético Š. Según este trabajo, un observador S utiliza un sistema de referencia S y un sistema de referencia no cinético Š.

La aceleración no cinética está relacionada con las fuerzas no cinéticas de interacción (fuerza gravitatoria, fuerza electromagnética, etc.) Sin embargo, la aceleración está relacionada con la fuerza cinética de interacción (Anexo B)

Por último, desde la ecuación (5) se deduce que la aceleración \mathbf{a}_a de una partícula A respecto a un sistema de referencia S fijo a una partícula S, está dada por:

$$\mathbf{a}_a = \frac{\mathbf{F}_a}{m_a} - \frac{\mathbf{F}_s}{m_s}$$

donde \mathbf{F}_a es la fuerza (no cinética) resultante que actúa sobre la partícula A, m_a es la masa de la partícula A, \mathbf{F}_s es la fuerza (no cinética) resultante que actúa sobre la partícula S y m_s es la masa de la partícula S.

Bibliografía

A. Einstein, Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General.

E. Mach, La Ciencia de la Mecánica.

H. Goldstein, Mecánica Clásica.

Anexo A

Si consideramos un sistema de bipartículas AB, AC y BC, se tiene:

$$m_{ab}\mathbf{a}_{ab} + m_{ac}\mathbf{a}_{ac} + m_{bc}\mathbf{a}_{bc} - \mathbf{F}_{ab} - \mathbf{F}_{ac} - \mathbf{F}_{bc} = 0$$

Considerando sólo las bipartículas que tienen la partícula C, entonces sigue:

$$m_{ac}\mathbf{a}_{ac} + m_{bc}\mathbf{a}_{bc} - \mathbf{F}_{ac} - \mathbf{F}_{bc} = 0$$

Sustituyendo las definiciones y las relaciones en la ecuación anterior, se obtiene:

$$m_a m_c (\mathbf{a}_a - \mathbf{a}_c) + m_b m_c (\mathbf{a}_b - \mathbf{a}_c) - (\mathbf{F}_a m_c - \mathbf{F}_c m_a) - (\mathbf{F}_b m_c - \mathbf{F}_c m_b) = 0$$

Dividiendo por m_c y asumiendo que el observador C fijo a la partícula C ($\mathbf{a}_c = 0$ respecto al observador C) es inercial ($\mathbf{F}_c = 0$), finalmente se deduce:

$$m_a \mathbf{a}_a + m_b \mathbf{a}_b - \mathbf{F}_a - \mathbf{F}_b = 0$$

Anexo B

La fuerza cinética \mathbf{F}_{Cab} ejercida sobre una partícula A por otra partícula B, causada por la interacción entre la partícula A y la partícula B, está dada por:

$$\mathbf{F}_{Cab} = \frac{m_a m_b}{M_T} (\mathbf{a}_a - \mathbf{a}_b)$$

donde m_a es la masa de la partícula A, m_b es la masa de la partícula B, \mathbf{a}_a es la aceleración de la partícula A, \mathbf{a}_b es la aceleración de la partícula B y M_T es la masa total del Universo.

Desde la ecuación anterior se deduce que la fuerza cinética resultante \mathbf{F}_{Ca} que actúa sobre una partícula A, está dada por:

$$\mathbf{F}_{Ca} = m_a (\mathbf{a}_a - \mathbf{a}_{cm})$$

donde m_a es la masa de la partícula A, \mathbf{a}_a es la aceleración de la partícula A y \mathbf{a}_{cm} es la aceleración del centro de masa del Universo.

Dinámica Clásica de Bipartículas II

Definiciones

$\mathbf{r}_{ab} = (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) =$ posición cinética

$\mathbf{v}_{ab} = (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b) =$ velocidad cinética

$\mathbf{a}_{ab} = (\mathbf{a}_a - \mathbf{a}_b) =$ aceleración cinética

$\check{\mathbf{r}}_{ab} = (\check{\mathbf{r}}_a - \check{\mathbf{r}}_b) =$ posición no cinética

$\check{\mathbf{v}}_{ab} = (\check{\mathbf{v}}_a - \check{\mathbf{v}}_b) =$ velocidad no cinética

$\check{\mathbf{a}}_{ab} = (\check{\mathbf{a}}_a - \check{\mathbf{a}}_b) =$ aceleración no cinética

$\mathring{\mathbf{r}}_{ab} = (\mathbf{r}_{ab} - \check{\mathbf{r}}_{ab}) =$ posición total

$\mathring{\mathbf{v}}_{ab} = (\mathbf{v}_{ab} - \check{\mathbf{v}}_{ab}) =$ velocidad total

$\mathring{\mathbf{a}}_{ab} = (\mathbf{a}_{ab} - \check{\mathbf{a}}_{ab}) =$ aceleración total

Relaciones

$$\mathring{\mathbf{a}}_{ab} = \mathring{\mathbf{F}}_{ab}/m_{ab} \quad \rightarrow \quad \mathring{\mathbf{a}}_{ab}^2 = (\mathring{\mathbf{F}}_{ab}/m_{ab})^2$$

$$\mathring{\mathbf{v}}_{ab} = \int \mathring{\mathbf{a}}_{ab} dt \quad \rightarrow \quad \mathring{\mathbf{v}}_{ab} = \int (\mathring{\mathbf{F}}_{ab}/m_{ab}) dt$$

$$1/2 \mathring{\mathbf{v}}_{ab}^2 = \int \mathring{\mathbf{a}}_{ab} d\mathring{\mathbf{r}}_{ab} \quad \rightarrow \quad 1/2 \mathring{\mathbf{v}}_{ab}^2 = \int (\mathring{\mathbf{F}}_{ab}/m_{ab}) d\mathring{\mathbf{r}}_{ab}$$

$$m_{ab} = m_a m_b \quad \mathring{\mathbf{F}}_{ab} = (\mathbf{F}_{ab} - \check{\mathbf{F}}_{ab})$$

$$\mathbf{F}_{ab} = (\mathbf{F}_a m_b - \mathbf{F}_b m_a) \quad \mathbf{F} = \text{fuerza cinética resultante}$$

$$\check{\mathbf{F}}_{ab} = (\check{\mathbf{F}}_a m_b - \check{\mathbf{F}}_b m_a) \quad \check{\mathbf{F}} = \text{fuerza no cinética resultante}$$

Principios

(1)	$m_{ab}\dot{\mathbf{r}}_{ab} = 0$	→	$\frac{1}{2}m_{ab}\dot{\mathbf{r}}_{ab}^2 = 0$	(2)
	↓		↓	
(3)	$m_{ab}\dot{\mathbf{v}}_{ab} = 0$	→	$\frac{1}{2}m_{ab}\dot{\mathbf{v}}_{ab}^2 = 0$	(4)
	↓	↗	↓	
(5)	$m_{ab}\dot{\mathbf{a}}_{ab} = 0$	→	$\frac{1}{2}m_{ab}\dot{\mathbf{a}}_{ab}^2 = 0$	(6)

Sustituyendo las relaciones en los principios, se obtiene:

(1)	$m_{ab}\dot{\mathbf{r}}_{ab} = 0$	→	$\frac{1}{2}m_{ab}\dot{\mathbf{r}}_{ab}^2 = 0$	(2)
	↓		↓	
(3)	$\int \dot{\mathbf{F}}_{ab} dt = 0$	→	$\int \dot{\mathbf{F}}_{ab} d\dot{\mathbf{r}}_{ab} = 0$	(4)
	↓	↗	↓	
(5)	$\dot{\mathbf{F}}_{ab} = 0$	→	$\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}_{ab}^2/m_{ab}) = 0$	(6)

Dinámica Clásica de Partículas II

Definiciones

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_a &= (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s) = \text{posición cinética} \\ \mathbf{v}'_a &= (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_s) = \text{velocidad cinética} \\ \mathbf{a}'_a &= (\mathbf{a}_a - \mathbf{a}_s) = \text{aceleración cinética}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{r}}'_a &= (\check{\mathbf{r}}_a - \check{\mathbf{r}}_s) = \text{posición no cinética} \\ \check{\mathbf{v}}'_a &= (\check{\mathbf{v}}_a - \check{\mathbf{v}}_s) = \text{velocidad no cinética} \\ \check{\mathbf{a}}'_a &= (\check{\mathbf{a}}_a - \check{\mathbf{a}}_s) = \text{aceleración no cinética}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_a &= (\mathbf{r}'_a - \check{\mathbf{r}}'_a) = \text{posición total} \\ \dot{\mathbf{v}}_a &= (\mathbf{v}'_a - \check{\mathbf{v}}'_a) = \text{velocidad total} \\ \dot{\mathbf{a}}_a &= (\mathbf{a}'_a - \check{\mathbf{a}}'_a) = \text{aceleración total}\end{aligned}$$

Relaciones

$$\dot{\mathbf{a}}_a = \dot{\mathbf{F}}_a/m_a \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{a}}_a^2 = (\dot{\mathbf{F}}_a/m_a)^2$$

$$\dot{\mathbf{v}}_a = \int \dot{\mathbf{a}}_a dt \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{v}}_a = \int (\dot{\mathbf{F}}_a/m_a) dt$$

$$1/2 \dot{\mathbf{v}}_a^2 = \int \dot{\mathbf{a}}_a d\dot{\mathbf{r}}_a \quad \rightarrow \quad 1/2 \dot{\mathbf{v}}_a^2 = \int (\dot{\mathbf{F}}_a/m_a) d\dot{\mathbf{r}}_a$$

$$\dot{\mathbf{F}}_a = (\mathbf{F}'_a - \check{\mathbf{F}}'_a) \quad \text{S = sistema de referencia}$$

$$\mathbf{F}'_a = (\mathbf{F}_a m_s - \mathbf{F}_s m_a)/m_s \quad \mathbf{F} = \text{fuerza cinética resultante}$$

$$\check{\mathbf{F}}'_a = (\check{\mathbf{F}}_a m_s - \check{\mathbf{F}}_s m_a)/m_s \quad \check{\mathbf{F}} = \text{fuerza no cinética resultante}$$

Principios

(1)	$m_a \dot{\mathbf{r}}_a = 0$	→	$1/2 m_a \dot{\mathbf{r}}_a^2 = 0$	(2)
	↓		↓	
(3)	$m_a \dot{\mathbf{v}}_a = 0$	→	$1/2 m_a \dot{\mathbf{v}}_a^2 = 0$	(4)
	↓	↗	↓	
(5)	$m_a \dot{\mathbf{a}}_a = 0$	→	$1/2 m_a \dot{\mathbf{a}}_a^2 = 0$	(6)

Sustituyendo las relaciones en los principios, se obtiene:

(1)	$m_a \dot{\mathbf{r}}_a = 0$	→	$1/2 m_a \dot{\mathbf{r}}_a^2 = 0$	(2)
	↓		↓	
(3)	$\int \dot{\mathbf{F}}_a dt = 0$	→	$\int \dot{\mathbf{F}}_a d\dot{\mathbf{r}}_a = 0$	(4)
	↓	↗	↓	
(5)	$\dot{\mathbf{F}}_a = 0$	→	$1/2 (\dot{\mathbf{F}}_a^2 / m_a) = 0$	(6)

Principios Generales

Definiciones	Partículas	Bipartículas
Masa	$M_i = \sum_i m_i$	$M_{ij} = \sum_i \sum_{j>i} m_{ij}$
Posición vectorial total	$\mathring{\mathbf{R}}_i = \sum_i m_i \mathring{\mathbf{r}}_i / M_i$	$\mathring{\mathbf{R}}_{ij} = \sum_i \sum_{j>i} m_{ij} \mathring{\mathbf{r}}_{ij} / M_{ij}$
Velocidad vectorial total	$\mathring{\mathbf{V}}_i = \sum_i m_i \mathring{\mathbf{v}}_i / M_i$	$\mathring{\mathbf{V}}_{ij} = \sum_i \sum_{j>i} m_{ij} \mathring{\mathbf{v}}_{ij} / M_{ij}$
Aceleración vectorial total	$\mathring{\mathbf{A}}_i = \sum_i m_i \mathring{\mathbf{a}}_i / M_i$	$\mathring{\mathbf{A}}_{ij} = \sum_i \sum_{j>i} m_{ij} \mathring{\mathbf{a}}_{ij} / M_{ij}$
Posición escalar total	$\mathring{R}_i = \sum_i 1/2 m_i \mathring{r}_i^2 / M_i$	$\mathring{R}_{ij} = \sum_i \sum_{j>i} 1/2 m_{ij} \mathring{r}_{ij}^2 / M_{ij}$
Velocidad escalar total	$\mathring{V}_i = \sum_i 1/2 m_i \mathring{v}_i^2 / M_i$	$\mathring{V}_{ij} = \sum_i \sum_{j>i} 1/2 m_{ij} \mathring{v}_{ij}^2 / M_{ij}$
Aceleración escalar total	$\mathring{A}_i = \sum_i 1/2 m_i \mathring{a}_i^2 / M_i$	$\mathring{A}_{ij} = \sum_i \sum_{j>i} 1/2 m_{ij} \mathring{a}_{ij}^2 / M_{ij}$

Principios Generales

