Un Nuevo Sistema de Ecuaciones en Mecánica Clásica

Alejandro A. Torassa

(2014) Buenos Aires, Argentina
atorassa@gmail.com

Resumen

En mecánica clásica, este trabajo presenta un nuevo sistema de ecuaciones que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia y que puede ser aplicado en cualquier sistema de referencia (rotante o no rotante) (inercial o no inercial) sin necesidad de introducir fuerzas ficticias.

Definiciones

Si consideramos un sistema de N partículas entonces el momento de inercia total I del sistema de partículas, la vivacidad cinética total Y del sistema de partículas y la energía cinética total K del sistema de partículas, son como sigue:

$$I = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} (m_i \, \bar{\mathbf{r}}_i \cdot \bar{\mathbf{r}}_i)$$

$$Y = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} (m_i \, \bar{\mathbf{r}}_i \cdot \bar{\mathbf{v}}_i)$$

$$K = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} (m_i \, \bar{\mathbf{v}}_i \cdot \bar{\mathbf{v}}_i + m_i \, \bar{\mathbf{a}}_i \cdot \bar{\mathbf{r}}_i)$$

donde $\bar{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm}$, $\bar{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{cm}$, $\bar{\mathbf{a}}_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{cm}$, $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{v}_i$ y $\mathbf{a}_i$ son la posición, la velocidad y la aceleración de la i-ésima partícula, $\mathbf{r}_{cm}$, $\mathbf{v}_{cm}$ y $\mathbf{a}_{cm}$ son la posición, la velocidad y la aceleración del centro de masa del sistema de partículas y m_i es la masa de la i-ésima partícula.

Si consideramos un sistema de N partículas entonces el empuje total P realizado por las sub-fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas, el trabajo total W realizado por las fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas y la energía potencial total U del sistema de partículas, son como sigue:

$$P = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \Delta \left(\bar{\mathbf{r}}_i \cdot \int \mathbf{F}_i \; dt \right)$$

$$W = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} + \left(2 \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\bar{\mathbf{r}}_i + \Delta \, \mathbf{F}_i \cdot \bar{\mathbf{r}}_i \right)$$

$$\Delta U = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} - \left(2 \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\bar{\mathbf{r}}_i + \Delta \, \mathbf{F}_i \cdot \bar{\mathbf{r}}_i \right)$$

donde $\bar{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm}$, $\mathbf{r}_i$ es la posición de la i-ésima partícula, $\mathbf{r}_{cm}$ es la posición del centro de masa del sistema de partículas, $\mathbf{F}_i$ es la fuerza resultante que actúa sobre la i-ésima partícula y t es el tiempo.

Teoremas

En un sistema de N partículas, el empuje total P realizado por las sub-fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas es igual al cambio en la vivacidad cinética total Y del sistema de partículas.

$$P = +\Delta Y$$

En un sistema de N partículas, el trabajo total W realizado por las fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas es igual al cambio en la energía cinética total K del sistema de partículas.

$$W = +\Delta K$$

En un sistema de N partículas, el trabajo total W realizado por las fuerzas conservativas que actúan sobre el sistema de partículas es igual y de signo opuesto al cambio en la energía potencial total U del sistema de partículas.

$$W = -\Delta U$$

Principios

En un sistema de N partículas, si las sub-fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas no realizan empuje entonces la vivacidad cinética total del sistema de partículas permanece constante.

$$Y = constante$$

En un sistema de N partículas, si las fuerzas no conservativas que actúan sobre el sistema de partículas no realizan trabajo entonces la energía (mecánica) total del sistema de partículas permanece constante.

$$K + U = constante$$

Observaciones

El nuevo sistema de ecuaciones es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia.

El nuevo sistema de ecuaciones puede ser aplicado en cualquier sistema de referencia (rotante o no rotante) (inercial o no inercial) sin necesidad de introducir fuerzas ficticias.

El nuevo sistema de ecuaciones sería válido incluso si la tercera ley de movimiento de Newton fuera falsa en un sistema de referencia inercial.

El nuevo sistema de ecuaciones sería válido incluso si las tres leyes de movimiento de Newton fueran falsas en un sistema de referencia no inercial.

Por otro lado, el nuevo sistema de ecuaciones puede ser obtenido a partir de la ecuación general de movimiento (**A. Torassa**, Ecuación General de Movimiento)

Anexo

Si consideramos un sistema aislado de N partículas y si la tercera ley de movimiento de Newton es válida entonces el trabajo total W realizado por las fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas y la energía potencial total U del sistema de partículas, son como sigue:

$$W = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} + \left(2 \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i + \Delta\, \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right)$$

$$\Delta U = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} - \left(2 \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i + \Delta\, \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right)$$

donde $\mathbf{r}_i$ es la posición de la i-ésima partícula y $\mathbf{F}_i$ es la fuerza resultante que actúa sobre la i-ésima partícula.

Si consideramos un sistema de N partículas entonces el momento de inercia total I del sistema de partículas, la vivacidad cinética total Y del sistema de partículas y la energía cinética total K del sistema de partículas, pueden también ser expresadas como sigue:

$$I = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \left(m_i\, \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i \right) - m_{cm}\, \mathbf{r}_{cm} \cdot \mathbf{r}_{cm}$$

$$Y = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \left(m_i\, \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v}_i \right) - m_{cm}\, \mathbf{r}_{cm} \cdot \mathbf{v}_{cm}$$

$$K = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \left(m_i\, \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i + m_i\, \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}_i \right) - m_{cm}\, \mathbf{v}_{cm} \cdot \mathbf{v}_{cm} - m_{cm}\, \mathbf{a}_{cm} \cdot \mathbf{r}_{cm}$$

$$I = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \sum_{j>i}^{\mathrm{N}} \left(\frac{m_i\, m_j}{m_{cm}}\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right)$$

$$Y = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \sum_{j>i}^{\mathrm{N}} \left(\frac{m_i\, m_j}{m_{cm}}\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \right)$$

$$K = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \sum_{j>i}^{\mathrm{N}} \left(\frac{m_i\, m_j}{m_{cm}}\, (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) + \frac{m_i\, m_j}{m_{cm}}\, (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right)$$

donde $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{r}_j$, $\mathbf{v}_j$, $\mathbf{a}_j$, $\mathbf{r}_{cm}$, $\mathbf{v}_{cm}$, $\mathbf{a}_{cm}$ son las posiciones, las velocidades y las aceleraciones de la i-ésima partícula, de la j-ésima partícula y del centro de masa del sistema de partículas y m_i, m_j, m_{cm} son las masas de la i-ésima partícula, de la j-ésima partícula y del centro de masa del sistema de partículas.